28/2/2018 1

1▶ **Άσκηση:** Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ορίζουμε την πράξη $\oplus$, ως εξής:

$$\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta - 3$$

• Αποτελεί το $\mathbb{R}$ με πράξη την $\oplus$ ομάδα;

• Στο προηγούμενο μάθημα:

$(G, *)$ ομάδα, αν και μόνο αν:

i) $(\forall \alpha, \beta, \gamma \in G)$, ισχύει:

$$\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$$

ii) $(\exists\, e \in G)$, τέτοιο ώστε:

$$\alpha * e = e * \alpha = \alpha, \quad \forall \alpha \in G$$

iii) $(\forall \alpha \in G), (\exists\, \alpha' \in G)$, τέτοιο ώστε:

$$\alpha * \alpha' = \alpha' * \alpha = e$$

▶ **Λύση:** • Προσεταιριστική: • $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) = \alpha \oplus (\beta + \gamma - 3)$

$= \alpha + (\beta + \gamma - 3) - 3 = \alpha + \beta + \gamma - 6$

• $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha + \beta + 3) \oplus \gamma = (\alpha + \beta - 3) + \gamma - 3 = \alpha + \beta + \gamma - 6$

• Άρα, ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα

· **Ουδέτερο στοιχείο**: Το $1 \in U_n$ (αφού $1^n = 1$)

και $\alpha \in U_n$, έχω: $\alpha * 1 = 1 * \alpha = \alpha$

· Άρα, το 1 είναι το ουδέτερο στοιχείο.

· **Αντίστροφος**: Έστω $\alpha \in U_n \xRightarrow{\alpha\tau\sigma} \alpha^n = 1$

· Έχω: $\alpha * (\alpha^{-1}) = (\alpha^{-1}) * \alpha = 1$

· Το α^{-1}, ανήκει και αυτό στο U_n, καθώς:

$$(\alpha^{-1})^n = \alpha^{-n} = (\alpha^n)^{-1} = 1^{-1} = \boxed{1}$$

· Άρα $\alpha^{-1} \in U_n$

· **Συνεπώς**, το $(U_n, \cdot)$ είναι ομάδα, με τάξη n
$(|U_n| = n)$

$\boxed{\text{▸ Θεώρημα}}$ Σε μια ομάδα G, υπάρχει μόνο ένα ταυτοτικό - ουδέτερο στοιχείο!

▸ **Απόδειξη**: Έστω e και f ταυτοτικά στοιχεία της G.

· e: ταυτοτικό $\Leftrightarrow$ $(\forall \alpha \in G)$, ισχύει: $\alpha * e = e * \alpha = \alpha$ (1)

· f: ταυτοτικό $\Leftrightarrow$ $(\forall \alpha \in G)$, ισχύει: $\alpha * f = f * \alpha = \alpha$ (2)

• **Λύση**: Έχω σαν δεδομένο, ότι:

$\cdot (\alpha * \beta) * (\alpha * \beta) = (\alpha * \alpha) * (\beta * \beta) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \alpha * (\beta * (\alpha * \beta)) = \alpha * (\alpha * (\beta * \beta)) \xrightarrow[\text{διαγραφής}]{\text{αριστερός νόμος}}$

$\Longrightarrow \beta * (\alpha * \beta) = \alpha * (\beta * \beta) \xrightarrow{\text{προσεταιριστική}}$

$\Longrightarrow (\beta * \alpha) * \beta = (\alpha * \beta) * \beta \xrightarrow[\text{διαγραφής}]{\text{δεξιός νόμος}}$

$\Longrightarrow \boxed{\beta * \alpha = \alpha * \beta}$ → ισχύει η μεταθετικότητα!

· Συνεπώς, η ομάδα G, είναι αβελιανή.

• Άσκηση: Έστω n φυσικός αριθμός. Δείξτε ότι το σύνολο: $U_n = \{ z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1 \}$ είναι ομάδα (Με πράξη τον πολ/μό $\cdot$)

• **Λύση**: Θα δείξω μέσω των γνωστών ιδιοτήτων, ότι το σύνολο U_n, είναι ομάδα!

· **Προσεταιριστική**: Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in U_n \subseteq \mathbb{C}$.

· Στους μιγαδικούς, ξέρουμε ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα, άρα θα ισχύει και στο U_n.

· Άρα: $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

· **Ουδέτερο στοιχείο:**

· **Έχω** $\alpha \oplus \boxed{3} = \boxed{3} \oplus \alpha = \alpha + \cancel{3} - \cancel{3} = \alpha$

· Άρα, το ουδέτερο στοιχείο είναι το 3

· **Αντίστροφος - Αντίθετος:**

· **Έχω:** $\alpha \oplus \boxed{6-\alpha} = 3 = \boxed{6-\alpha} \oplus \alpha$

ουδέτερο στοιχείο

· Άρα το αντίστροφο(αντίθετο) του α, είναι το $6-\alpha$

· **Συνεπώς**, το $(\mathbb{R}, \oplus)$, είναι **ομάδα**!

▶ Άσκηση Έστω G ομάδα, τέτοια ώστε για κάθε $\alpha, \beta \in G$, να ισχύει:

· $(\alpha * \beta)^2 = \alpha^2 * \beta^2$

Δείξτε ότι η ομάδα G, είναι **αβελιανή**

Να ισχύει αντιμεταθετικότητα!

⚠ Αν $\alpha, \beta \in G$, τότε:

- $(\alpha * \beta)' = \beta' * \alpha'$
- $(\alpha * \beta)^{-1} = \beta^{-1} * \alpha^{-1}$
- $-(\alpha + \beta) = (-\beta) + (-\alpha)$

▸ Ορισμός Αν ένα υποσύνολο H μιας ομάδας G είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$ και αν το H είναι ομάδα (με την ίδια πράξη), τότε το H λέγεται υποομάδα της G

▸ Ορισμός Έστω G ομάδα και $S \subseteq G$. Αν για κάθε $\alpha, b \in S \Rightarrow \alpha * b \in S$, τότε λέμε ότι το S είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$ της G.

▸ Παραδείγματα $(\mathbb{Z}_8, +)$ • Έστω $S = \{[0]_8, [3]_8\}$

- Καθώς $[3] + [3] = [6] \notin S \Rightarrow$ Το S δεν είναι κλειστό ως προς την πράξη $+$.

• Έστω $S = \{[0]_8, [4]_8\}$

- Καθώς $[4] + [4] = [8] = [0]_8 \in S \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Το S είναι κλειστό ως προς την πράξη $+$.

• 1η απόδειξη : Έχω : $e * f = f$, καθώς $f \in G$

Επίσης : $e * f = e$, καθώς $e \in G$

Άρα : $\boxed{e = f}$

• 2η απόδειξη : Από τις σχέσεις (1) και (2), έχω:

$$\alpha * e = \alpha * f \xrightarrow[\text{νόμος διαγραφής}]{\text{αριστερός}} \boxed{e = f}$$

Θεώρημα - Άσκηση Σε μία ομάδα G, κάθε στοιχείο α, έχει μοναδικό αντίστροφο.

• Απόδειξη - Λύση : Έστω α' και α'' αντίστροφα στοιχεία του α. Δηλαδή :

$$\left.\begin{aligned} &\alpha' * \alpha = \alpha * \alpha' = e \\ \text{και} : \ &\alpha'' * \alpha = \alpha * \alpha'' = e \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{διαγραφής}]{\text{νόμος}}$$

$$\Longrightarrow \alpha * \alpha' = \alpha * \alpha'' \Longrightarrow \boxed{\alpha' = \alpha''} \text{ Αποδείχθη!!!}$$

— Έστω 1: ουδέτερο στοιχείο.

Καθώς $1 = \alpha^0 \in \langle\alpha\rangle$, έπεται ότι

το 1 είναι ουδέτερο στοιχείο της $\langle\alpha\rangle$.

— Έστω $\beta \in \langle\alpha\rangle \Rightarrow \beta = \alpha^{\mu} \Rightarrow \alpha^{\mu} \cdot \boxed{\alpha^{-\mu}} = 1$

Άρα $\alpha^{-\mu} = (\alpha^{\mu})^{-1}$. Άρα $\beta^{-1} = \alpha^{-\mu} \in \langle\alpha\rangle$.

• Συνεπώς: $\boxed{\langle\alpha\rangle \leq G}$.

• Υποομάδες του $U(\mathbb{Z}_{11}) = \{[1], \dots, [10]\}$.

• Προφανώς $\langle[1]\rangle \leq U(\mathbb{Z}_{11})$

και $\langle[2]_{11}\rangle = U(\mathbb{Z}_{11}) \leq U(\mathbb{Z}_{11})$.

• Άρα, τα $\langle[1]_{11}\rangle$ και $\langle[2]_{11}\rangle$, υποομάδες του $U(\mathbb{Z}_{11})$

• Υποομάδες του $U_4=\{1,-1,i,-i\}\subseteq \mathbb{C}$ (ως προς $*$)

· Προφανώς: $U_4 \le U_4$ → Υποομάδα του εαυτού της.

$\{1\}\le U_4$ Πληρούν τις ιδιότητες μιας ομάδας

και: $\{1,-1\}\le U_4$

• Υποομάδες του $GL(n,\mathbb{R})=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A\neq 0\}$.

· Προφανώς: $GL(n,\mathbb{R})\le GL(n,\mathbb{R})$ → Υποομάδα του εαυτού της

~~μοναδιαίος Α~~

και: $\{I_n\}\le GL(n,\mathbb{R})$

και: $\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid \det A=1\}=SL(n,\mathbb{R})\le GL(n,\mathbb{R})$

(→ Πληρούν τις ιδιότητες μιας ομάδας, διότι, αν A^{-1}: αντίστροφος του A, τότε και $\det(A^{-1})=1 \Rightarrow A^{-1}\in SL(n,\mathbb{R})$)

• Έστω G ομάδα και $\alpha\in G$. Τότε το σύνολο

$\langle\alpha\rangle=\{\alpha^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$ είναι υποομάδα του G

→ Έστω: $\beta,\gamma\in\langle\alpha\rangle \Rightarrow \boxed{\beta=\alpha^n}$ & $\boxed{\gamma=\alpha^m}$

$\Rightarrow \beta*\gamma=\alpha^n*\alpha^m=\alpha^{n+m}\in\langle\alpha\rangle$

• Άρα, το $\langle\alpha\rangle$ είναι κλειστό ως προς την πράξη $*$.

H: γνήσια υποομάδα της $G \longrightarrow H < G$

Δ H: υποομάδα της $G \longrightarrow H \leq G$

• Αντίστοιχα, τα σύνολα $S = \{[0]_8\}$ και το $S' = \{[0],[2],[4],[6]\}$ είναι κλειστά, ως προς την πράξη $+$

Παραδείγματα

• Δ Κάθε ομάδα, είναι υποομάδα του εαυτού της

Δηλαδή: Αν G: ομάδα $\Longrightarrow G \leq G$

• Δ Κάθε ομάδα, έχει τουλάχιστον 2 υποομάδες, τον εαυτό του, και το ουδέτερο στοιχείο

$\boxed{G \leq G}$ $\boxed{\{e\} \leq G}$

• Υποομάδες του $\mathbb{Z}_8$: Βρήκαμε ήδη, 4 σύνολα κλειστά ως προς την πράξη $+$: $\mathbb{Z}_8 \leq G$ — Υποομάδα του εαυτού της

Ουδέτερο στοιχείο — $\{[0]_8\} \leq G$

Υποομάδες, καθώς πληρούν τις ιδιότητες μιας ομάδας

$\{[0]_8, [4]_8\} \leq G$

$\{[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8\} \leq G$

Δ Για $G = \mathbb{Z}_8$